

فصل دوم

توابع مختلط

توابع مختلط

یادآوری

در عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ و $\text{Im}(z) = y$ و $\text{Re}(z) = x$ ، روابط اولیه زیر برقرار است:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{z} = \text{مزدوج} = x - iy$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

حال اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$$|z - z_0| = R \text{ یک دایره به شعاع } R \text{ و به مرکز } z_0 \text{ می باشد.}$$

$$|z - z_0| + |z - z_1| = R \text{ بیانگر یک بیضی با کانون های } z_0 \text{ و } z_1 \text{ می باشد، (با شرط } |z_0 - z_1| < R \text{)}$$

$$|z - z_0| - |z - z_1| = R \text{ بیانگر یک هذلولی با کانون های } z_0 \text{ و } z_1 \text{ می باشد، (با شرط } |z_0 - z_1| > R \text{)}$$

رابطه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

- فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

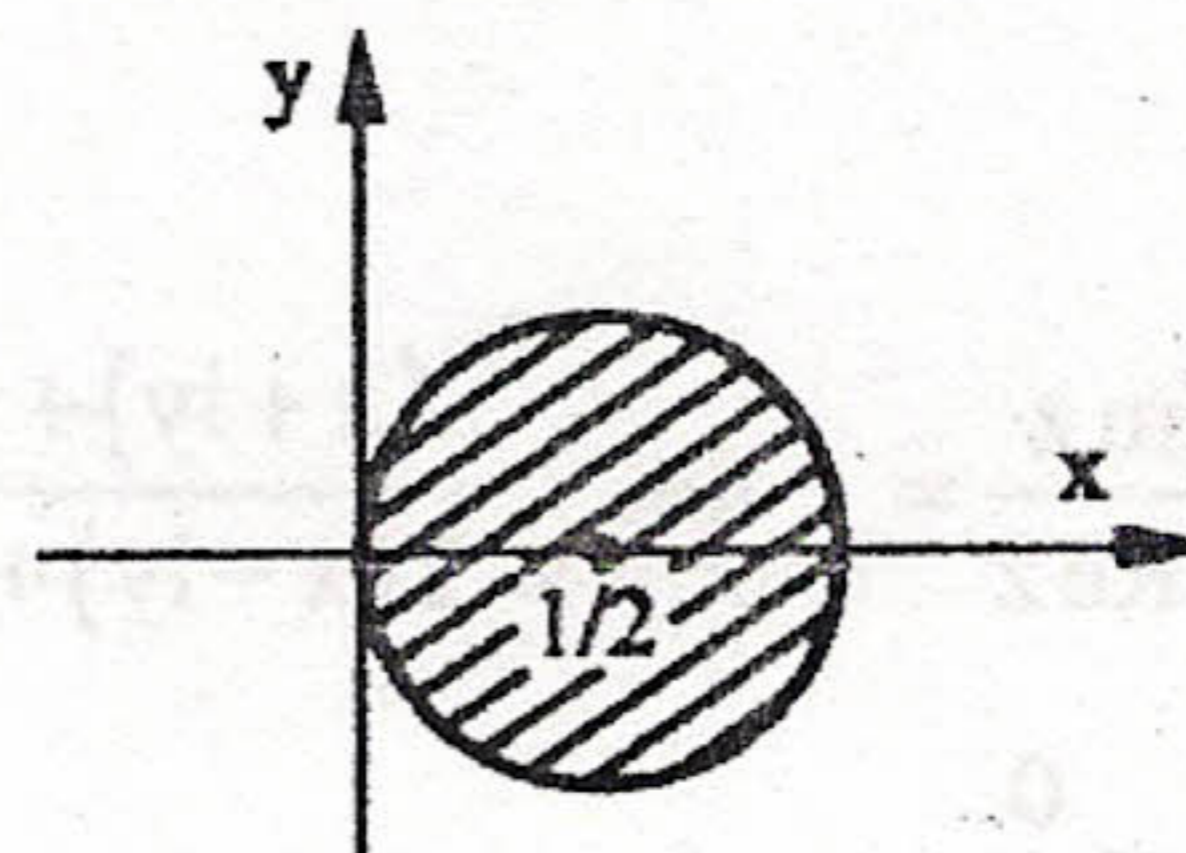
مثال : مکان هندسی نقاطی از صفحه، که با رابطه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

حل :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2+y^2-x < 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$



بنابراین مکان هندسی موردنظر داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

مثال : هرگاه $z = x+iy$ باشد، آن‌گاه نامعادله $\frac{|z-3|}{|z+3|} < 2$ را ساده کنید.

حل :

$$\frac{|x+iy-3|}{|x+iy+3|} < 2 \rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}} < 2$$

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2} < 4 \rightarrow 3x^2+30x+27+3y^2 > 0 \rightarrow x^2+10x+9+y^2 > 0 \rightarrow (x+5)^2-25+9+y^2 > 0$$

$$\rightarrow (x+5)^2+y^2 > 16 \rightarrow |z+5| > 4$$

توابع مختلط

حد و پیوستگی در توابع مختلط

تابع مختلط $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در نظر بگیرید، می‌گوییم این تابع مختلط در نقطه z_0 دارای حد است، هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای حد تابع باشند. همچنین می‌گوییم تابع مختلط $w = f(z)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشد.
به عبارت دیگر:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x,y)$$

تذکر: ملاحظه می‌شود که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیر دارد و می‌دانیم حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد و لذا اگر دو طریق مختلفی که برای محاسبه یک حد دو متغیره استفاده می‌شود به دو جواب مختلف منجر شود حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

مثال: مقدار ثابت α را چقدر انتخاب کنیم تا تابع مختلط $f(z) = \begin{cases} \frac{z + \text{Im} z}{2\bar{z} + \text{Re} z} & z \neq 0 \\ \alpha & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + \text{Im} z}{2\bar{z} + \text{Re} z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y(i+1)}{3x-2iy} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

اگر ترتیب میل کردن متغیر را به صفر در نظر بگیریم:

۱- اول فرض می‌کنیم که $x \rightarrow 0$ و بعد $y \rightarrow 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(i+1)}{-2iy} = \frac{i+1}{-2i}$$

۲- اول فرض می‌کنیم که $y \rightarrow 0$ و بعد $x \rightarrow 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

پس چون دو جواب مختلف به دست آوردیم تابع در $z=0$ دارای حد نیست و به ازای هیچ مقدار α در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

مثال: تابع مختلط $f(z) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} + i \frac{xy}{x^2-y^2}$ را در نظر بگیرید، آیا این تابع در نقطه $z=0$ دارای حد می‌باشد.

حل:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}} \lim_{r \rightarrow 0, \forall \theta} \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0, \forall \theta} r \cos \theta \cdot \sin^2 \theta = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2} \xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}} \lim_{r \rightarrow 0, \forall \theta} \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \text{ (وابسته به } \theta \text{ است (حد موجود نیست))}$$

پس در کل حد $f(z)$ در $z=0$ وجود ندارد.

مشتق تابع مختلط

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

و هم‌چنین $f'(z)$ در صورت وجود از رابطه زیر نیز به دست می‌آید:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

مثال: تابع $f(z) = \text{Im}(z)$ مفروض است، این تابع در کجا پیوسته و در کجا مشتق‌پذیر است؟

$$U=0 \quad V=y \quad f(z)=y$$

حل:

به وضوح دیده می‌شود که توابع U و V همه جا پیوسته هستند، لذا $f(z)$ همه جا پیوسته است.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z + \Delta z) - \operatorname{Im}(z)}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, & f'(z) = \frac{1}{i} \\ \Delta y \rightarrow 0, & f'(z) = 0 \end{cases}$$

پس حد مذکور موجود نیست و لذا $f(z)$ هیچ‌جا مشتق ندارد.

تعاریف:

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در این نقطه یک همسایگی به شعاع ε از این نقطه مشتق‌پذیر باشد (بنابراین مشتق‌پذیر بودن یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مذکور است).
تمام توابع چند جمله‌ای از z مانند $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن n عدد طبیعی و a_n, \dots, a_0 اعداد مختلط باشند همه‌جا تحلیلی هستند.

تمام توابع گویا مانند $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله‌ای از z می‌باشند در همه جا به جز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی هستند.

توابع $e^z, \cos z, \sin z$ همه جا تحلیلی هستند.

ترکیب دو تابع تحلیلی، $f \circ g$ یک تابع تحلیلی است.

نقطه تکین: فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکینی تابع گفته می‌شود. بنابراین اگر تابعی هیچ‌جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطه تکینی ندارد.
به طور مثال در تابع $f(z) = e^{\cos z} + z^2$ ، چون $\cos z$ و e^z و z^2 توابعی تحلیلی هستند پس جمع آن‌ها نیز یک تابع تحلیلی می‌باشد.
چون تابع $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست، بنابراین در هیچ‌جا تحلیلی نیست، پس اصلاً نقطه تکینی ندارد.

قضایای کوشی - ریمان

الف) قضیه اول کوشی - ریمان

هرگاه تابع مختلط $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:
$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

و توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی - ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

قضیه دوم کوشی - ریمان

تابع مختلط $w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ را در نظر بگیرید. چنانچه توابع u و v در نقطه (x_0, y_0) معادلات کوشی - ریمان را ارضا کنند، و توابع u و v و u_x و u_y و v_x و v_y در نقطه (x_0, y_0) و همسایگی آن پیوسته باشند، آن گاه تابع مختلط $w = f(z)$ در نقطه $x_0 + iy_0 = z_0$ مشتق پذیر است.

توجه کنید برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق داشتن یک تابع مختلط در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه عدم مشتق پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطه مذکور را نتیجه می دهد.

مثال : تابع مختلط زیر مفروض است این تابع در چه نقاطی مشتق پذیر است و مشتق آن در آن نقاط چیست؟

$$f(z) = 2\operatorname{Re}z + \bar{z} + z^2$$

حل :

$$f(z) = 2x + x - iy + x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{cases} u(x, y) = 3x + x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy - y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$$

چون $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ بنابراین تابع $f(z)$ در هیچ کجا مشتق پذیر نیست.

مثال : تابع مختلط زیر را در نظر بگیرید در چه نقاطی مشتق پذیر می باشد؟

$$f(z) = \operatorname{Re}z^2 + iz\bar{z}$$

حل :

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2) \rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$$

برقراری معادلات کوشی - ریمان می طلبد:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y = -2x \end{cases}$$

بنابراین معادلات کوشی - ریمان فقط روی خط $y = x$ برقرار است.

چون توابع u و v و u_x ، u_y ، v_x و v_y همه جا پیوسته است.

بنابراین تابع در اطراف خط $y = x$ نیز پیوسته است و $f(z)$ در روی خط $y = x$ مشتق پذیر است:

$$f'(z) = 2x + i(2x) \quad (y = x \text{ روی خط})$$

مثال : اگر $f(z) = -\operatorname{Re}(z^2) + iz\bar{z}$ آنگاه تابع $f(z)$ در کجا مشتق پذیر است؟

در این صورت داریم: $u = y^2 - x^2$ و $v = y^2 + x^2$ لذا برای برقراری معادلات کوشی ریمان باید داشته باشیم:

حل :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -2x = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y = -2x \end{cases}$$

معادلات مذکور تنها روی خط $y = -x$ برقرارند و با استفاده از قضیه دوم کوشی ریمان می توان نشان داد، تنها روی این خط تابع $f(z)$ مشتق پذیر است بنابراین تابع در هیچ کجا (حتی روی خط مزبور) تحلیلی نیست.

تابع همساز

تابع حقیقی $h(x, y)$ را تابعی همساز می گوئیم هرگاه معادله لاپلاس را ارضا کند.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

قضیه: چنانچه تابع مختلط $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تابعی تام باشد، یعنی همه جا تحلیلی باشد، آن گاه معادلات کوشی ریمان

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

همه جا برقرارند و نیز هر دو تابع u و v توابعی همسازند و اصطلاحاً در این شرایط می گوئیم v مزدوج همساز u می باشد.

مثال : می دانیم تابع $f(z) = u(y) + iv(x, y)$ تابعی همواره تحلیلی است کلی ترین ضابطه ای که $f(z)$ بر حسب z را دارد مشخص کنید:

حل :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

معادلات C. R باید همواره برقرار باشد.

از آن جا که $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ لذا $u = u(y)$ و از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = v(x)$$

$$u'(y) = -v'(x) = k$$

عبارت بر حسب y عبارت بر حسب x

پس از معادله دوم داریم:

توجه کنید که رابطه $u'(y) = -v'(x)$ تنها زمانی برقرار خواهد بود که هر دو تابع، تابع ثابت باشند.

$$u(y) = ky + A \leftarrow u'(y) = k$$

$$v(x) = -kx + B \leftarrow v'(x) = -k$$

پس داریم:

$$f(z) = (ky + A) + i(-kx + B) = -ik(x + iy) + A + iB$$

$$f(z) = -ikz + c$$

نکته : توجه کنید، وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ بر حسب (x, y) پیدا شد، برای نوشتن آن بر حسب z کافی است همه x ها را به z و همه y ها را به صفر تبدیل کنیم.

مثال : چنانچه u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد. توابع u و v باید دارای چه شرطی باشند؟

حل :

$$u \Rightarrow v + iu \quad \text{تابع تحلیلی مزدوج همساز } v \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$v \Rightarrow u + iv \quad \text{تابع تحلیلی مزدوج همساز } u \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow u = \text{ثابت}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = \text{ثابت}$$

با کمی مقایسه روابط داریم:

مثال : اگر تابع $f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ همه جا تحلیلی باشد، معادلات حاکم بر u و v را به دست آورید.

حل :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = \frac{\partial}{\partial y}(v_x - u_y) \rightarrow u_{xx} + v_{xy} = v_{xy} - u_{yy} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = -\frac{\partial}{\partial x}(v_x - u_y) \rightarrow u_{xy} + v_{yy} = -v_{xx} + u_{xy} \rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ چنانچه $v(x, y)$ مزدوج همساز این تابع باشد و داشته باشیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ مطلوب است محاسبه $f'(i)$.

حل :

$$f'(z) = u_x - iu_y$$

$$u_x = 2xe^{x^2 - y^2} \cos 2xy - 2ye^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

$$u_y = -2ye^{x^2 - y^2} \cos 2xy - 2xe^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

$$f'(i) = f'(0, 1) = 0 - i(-2e^{0^2 - 1^2} \cos 0) = +2ie^{-1}$$

مثال : اولاً مقادیر a , b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x, y) = x^4 + ax^2y^2 + 2x^3 + by^4 + cxy^2$ تابع همساز باشد. سپس تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را پیدا کنید.

حل : شرط همساز بودن تابع u ایجاب می کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow (12x^2 + 2ay^2 + 12x) + (2ax^2 + 12by^2 + 2cx) = 0$$

چون روابط فوق می خواهد همواره به ازای هر x و y برقرار باشد، پس داریم:

$$x^2 \text{ ضریب: } 12 + 2a = 0 \rightarrow a = -6$$

$$y^2 \text{ ضریب: } 2a + 12b = 0 \rightarrow b = 1$$

$$x \text{ ضریب: } 12 + 2c = 0 \rightarrow c = -6$$

برای به دست آوردن $f(z)$ می توان از دو روش جلو رفت.

الف) نخست مزدوج همساز u را پیدا می کنیم پس داریم:

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + 2x^3 + y^4 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + 6x^2 - 6y^2 \rightarrow v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -(-12x^2y + 4y^3 - 12xy) \rightarrow v(x, y) = 4x^3y - 4y^3x + 6x^2y + g(y)$$

$$\rightarrow v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + c$$

پس داریم:

$$f(z) = (x^4 - 6x^2y^2 + 2x^3 + y^4 - 6xy^2) + i(4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y - 2y^3 + c)$$

$$f(z) = z^4 + 2z^3 + ic \quad \text{حال با تبدیل } \begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \text{ به دست می آید:}$$

ب) بدون نیاز به محاسبه v با توجه به قضیه اول کوشی - ریمان می توان $f'(z)$ را به دست آورد.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = (4x^3 - 12xy^2 + 6x^2 - 6y^2) - i(-12x^2y + 4y^3 - 12xy)$$

$$f'(z) = 4z^3 + 6z^2 \quad \text{حال با تبدیل } \begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \text{ به دست می آید}$$

$$f(z) = z^4 + 2z^3 + k \rightarrow \text{حال از } f'(z) \text{ انتگرال می گیریم.}$$

مثال: اگر $u(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز u و تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_x = 2^x \ln 2 \cos(y \ln 2) = v_y \\ u_y = -2^x \ln 2 \sin(y \ln 2) = -v_x \end{cases} \rightarrow v = 2^x \sin(y \ln 2) + c$$

$$f(z) = 2^x \cos(y \ln 2) + (2^x \sin(y \ln 2) + c)i$$

$$f(z) = 2^z + C$$

$$\text{حال با تبدیل } \begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \text{ به دست می آید:}$$