فصل اول

آنالیز فوریه

سری فوریه

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $p=2L$ باشد که در فاصله تناوب خود پیوسته و تکه‌تکه هموار باشد. آن‌گاه می‌توان تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف که به سری فوریه تابع موسوم است به فرم زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن ضرایب سری فوریه به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\,dx \qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

نکته : برخی مواقع یک تابع به خودی خود متناوب نمی‌باشد و در فاصله‌ای روی آن بحث می‌شود که تابع مذکور در فاصله داده شده مد نظر قرار گرفته و در خارج آن فاصله به صورت متناوب گسترش یافته است که برای آن تابع متناوب سری فوریه می‌نویسیم

نکته : اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد، (نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن باشد):

$$\boxed{b_n=0}\quad,\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

و اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد، (نمودار آن نسبت به مرکز مختصات متقارن باشد):

$$\boxed{a_n=0}\quad,\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$d(uv) = du\,v + v\,du$

مثال : برای تابع $f(x)=\begin{cases}1 & -1<x<0\\ x & 0<x<1\end{cases}$، ثابت سری فوریه را محاسبه کنید؟

حل :

$$2L = 2 \rightarrow L = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x).dx \rightarrow a_0 = \frac{1}{1}\left\{\int_{-1}^{0} 1.dx + \int_{0}^{1} x.dx\right\} = x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}$$

مثال : تابع $f(x) = x$ ،$0 \le x \le 2\pi$ مفروض است، ضرایب جملات کسینوسی در بسط سری فوریه این تابع را بیابید.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\frac{n\pi x}{\pi} dx$

حل :

مشتق	انتگرال
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi$$

$x\frac{\sin nx}{n} + \int \frac{\sin nx}{n} dx$

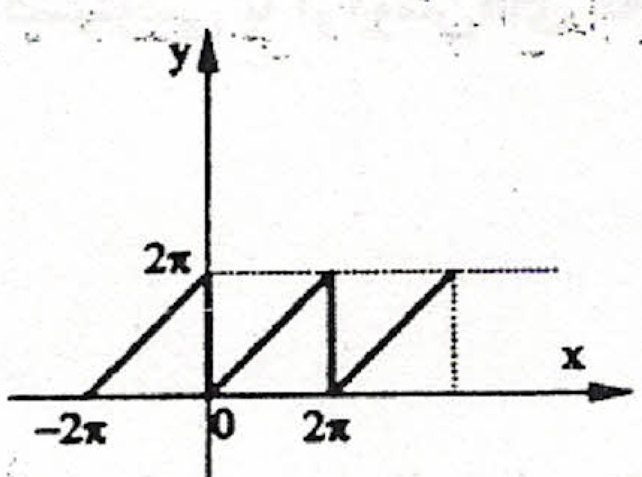
$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx.dx$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right\} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x.dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2}\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \pi$$

دقت کنید. $\frac{a_0}{2}$، همان مقدار متوسط تابع در فاصلهٔ تناوب آن می‌باشد که می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\text{مقدار متوسط} = \frac{\text{سطح زیر نمودار تابع در فاصله تناوب}}{\text{طول فاصله تناوب}}$$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{\frac{2\pi.2\pi}{2}}{2\pi} = \pi$$

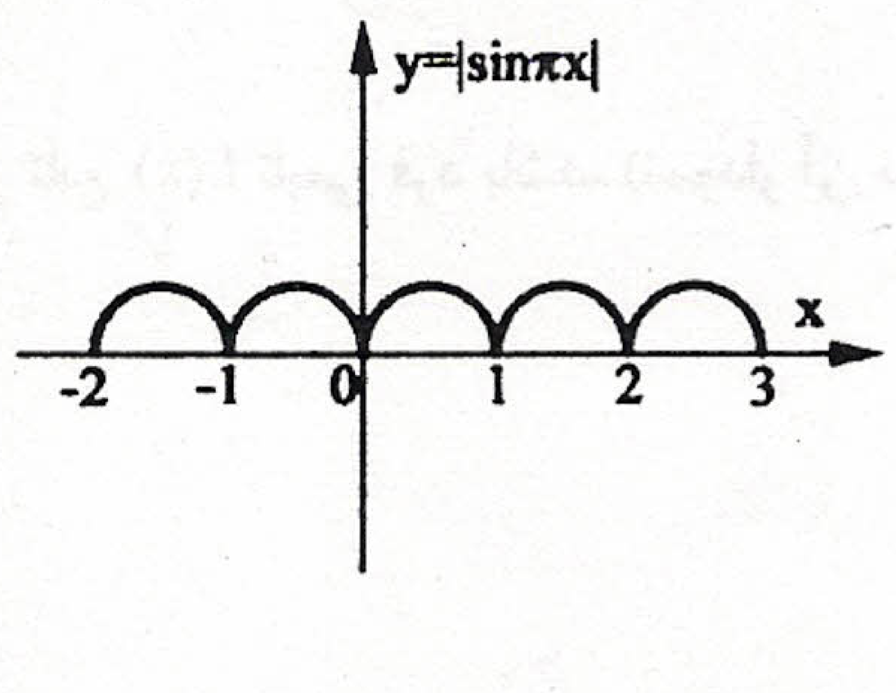
مثال : سری فوریه تابع $f(x) = 4\sin x\cos^2 x$ کدامست؟

حل :

$$f(x) = 4\sin x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 2\sin x + 2\sin x\cos 2x = 2\sin x + \sin(x+2x) + \sin(x-2x)$$

$$= 2\sin x + \sin 3x - \sin x = \sin x + \sin 3x$$

مثال : تابع $f(x) = |\sin\pi x|$ مفروض است، دوره تناوب و ضرایب a_n را به‌دست آورید.



$\int 2\int_0 \sin\pi x \sin 2\pi n x$

$\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos p+q + \cos p-q)$

$\cos p-q - \cos p+q$

cos

حل : $f(x)$ متناوب است با دوره تناوب $L=\frac{1}{2}, P=1$ و از آن‌جا که $f(x)$ زوج است $b_n=0$ پس:

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x.\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x.dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x.\cos 2n\pi x.dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\{\sin(1+2n)\pi x+\sin(1-2n)\pi x\}dx$$

$$=2\left\{\frac{-\cos(1+2n)\pi x}{(1+2n)\pi}+\frac{-\cos(1-2n)\pi x}{(1-2n)\pi}\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\left\{0+\frac{1}{(1+2n)\pi}+0+\frac{1}{(1-2n)\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1-2n+1+2n}{1-4n^2}\right\}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

مثال : بسط فوریه تابع دلتای دیراک در فاصله $-\pi<x<\pi$ را به‌دست آورید.

حل : با توجه به خاصیت تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

لذا در بسط فوریه این تابع داریم:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\cos 0=\frac{1}{\pi}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)dx=\frac{1}{\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\sin(0)=0$$

لذا:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cos nx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right)$$

نکته : همان‌طوری که دیدیم سری فوریه یک تابع، نوشتن تابع به صورت مجموع جملات سینوسی، کسینوسی است و ثابت می‌شود ضرایب سری فوریه که با توجه به روابط گفته شده، به‌دست می‌آیند، چنان‌چه مورد استفاده قرار گیرند، بهترین تقریب برای توصیف یک تابع از نظر حداقل مربعات می‌باشد.

مثال : تابع $f(x)$ به صورت زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

چنان‌چه بخواهیم تابع مذکور در فاصلهٔ داده شده به صورت تابعی به فرم $a+b\cos x+c\sin x$ تقریب بزنیم، a، b، c چقدر باشند که بهترین تقریب زده شود.

حل :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos x\,dx+\int_0^{\pi}x\cos x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{x\sin x\Bigg|_0^{\pi}+\cos x\Bigg|_0^{\pi}\right\}=-\frac{2}{\pi}$$

مشتق	انتگرال
x	$\cos x$
1 (+)	$\sin x$
0 (−)	$-\cos x$

انتگرال	مشتق
$\sin x$	x
$-\cos x$	1
$-\sin x$	0

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} 0 \sin x \, dx + \int_{0}^{\pi} x \sin x \, dx \right\} = \frac{1}{\pi}\left[-x\cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} \right] = 1$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x$$

قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی سری‌های فوریه

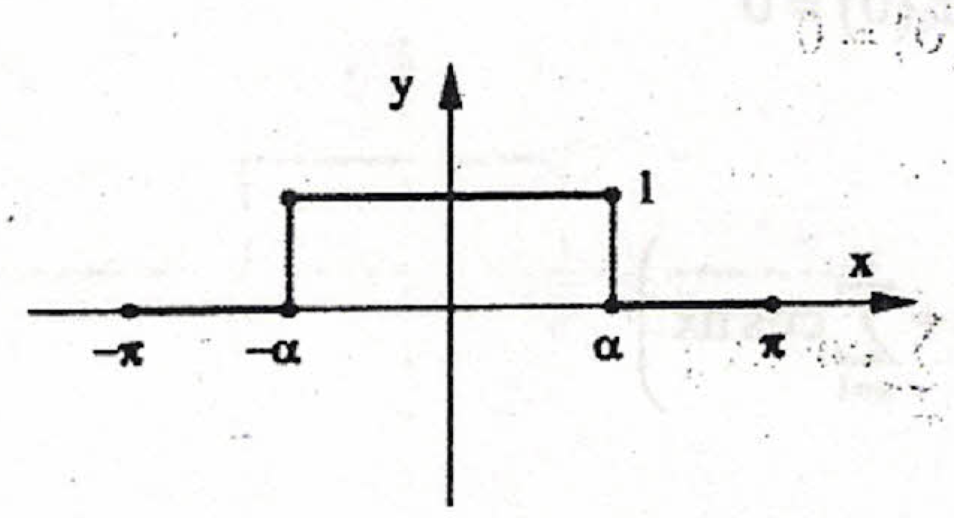
می‌توان نشان داد:

الف) اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه: $f(x_0)$ برابرمقدار سری فوریه تابع به ازای $x = x_0$ است.

ب) اگر $f(x)$ در x_0 گسسته باشد، آن‌گاه: $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$ برابر مقدار سری فوریه تابع به ازای $x = x_0$ است.

به عبارت ساده‌تر: سری فوریه در نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ هم‌گرا است.

مثال : با توجه به سری فوریه تابع ترسیم شده در شکل زیر حاصل سری عددی $I = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n}$ را به دست آورید.



حل :

$2L = 2\pi \to L = \pi$ $\qquad$ تابع زوج $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1 dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

سری فوریه: $\dfrac{\alpha}{\pi} + \sum \dfrac{2}{n\pi}\sin n\alpha.\cos nx$

در $x = 0$ که پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum \frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos 0$$

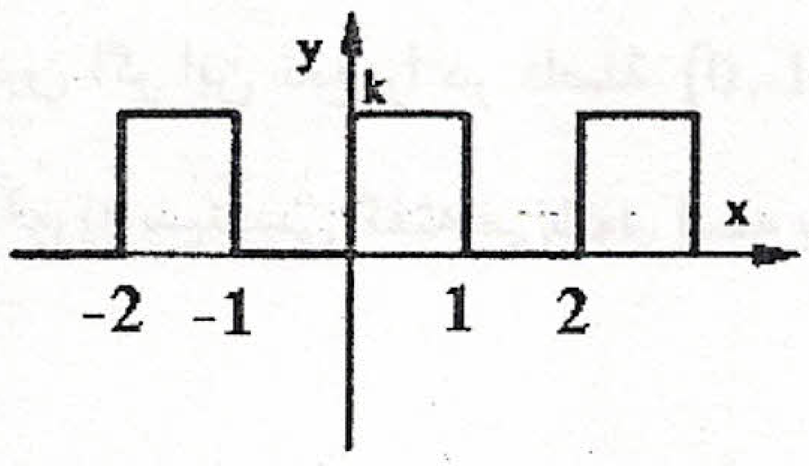
داریم $f(0) = 1$، در نتیجه:

$$1 - \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$$

$$I = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right).\frac{\pi}{2}$$

مثال : از بسط فوریه تابع زیر مقدار $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ برابر است با:

$a_n = \frac{1}{1}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx$



$\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{\sin n\pi}{n\pi} \neq 1$

حل : تابع ترسیم شده، توسیع متناوب تابع $f(x)=\begin{cases}k & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$ می‌باشد.

$2L=2\rightarrow L=1$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\,dx=k$$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\cos\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\cos\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{k}{1}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{1}x\Big|_0^1=0$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\sin\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\sin\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{-k}{1}\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{1}x\Big|_0^1=\frac{-k}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ \frac{2k}{n\pi} & \text{فرد } n\end{cases}$$

لذا سری فوریه تابع مورد نظر، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\frac{k}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{1}x$$

در $x=\frac{1}{2}$، تابع پیوسته بوده و طبق قضیه دیریکله داریم:

$$k=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

مثال : تابع $0<x<2$ و $f(x)=e^{-x}$ مفروض است در سری فوریهٔ این تابع مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ چقدر است؟

$a_n = \int_0^2 e^{-x}\cos n\pi x$

حل :

$$\text{سری فوریه}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_0^2 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^2=-\left(e^{-2}-1\right)=1-e^{-2}$$

در $x=0$ که تابع گسسته می‌شود، طبق دیریکله داریم:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{e^{-2}+e^{0}}{2}=\frac{1-e^{-2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=e^{-2}$$

سری فوریه سینوسی و کسینوسی

فرض کنید تابع $f(x)$ در $(0,L)$ تعریف شده باشد، اگر این تابع را در فاصله $(-L,0)$ به طور زوج گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است که در چنین وضعیتی $b_n=0$ است.

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x dx} \qquad \boxed{a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).dx}$$

همچنین اگر این تابع را در فاصلهٔ $(-L,0)$ به طور فرد گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه سینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است ضرایب a_n و a_0 مساوی با صفر است.

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx}$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \frac{1}{2} & 1<x<2\end{cases}$ مفروض است، مطلوب است سری فوریه سینوسی تابع مورد نظر.

حل: گسترش به‌صورت فرد $a_n = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\sin\frac{n\pi}{2}x.dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}x.dx\right] = \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال: تابع $f(x)$ در فاصله $(0, L)$ تعریف شده است اگر بخواهیم برای این تابع سری فوریه سینوسی بنویسیم $b_n = \frac{1}{n^3}$ و اگر بخواهیم سری فوریه کسینوسی بنویسیم $a_n = \frac{1}{n+\pi}$، کدام نوع سری فوریه برای توصیف این تابع مناسب‌تر است.

نکته: بدیهی است که سری فوریه‌ای مناسب‌تر است که با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی نزدیک‌تر شود و البته این موضوع زمانی رخ می‌دهد که ضرایب سری فوریه با افزایش n، سریع‌تر کوچک شده و به صفر میل کند البته در این مساله سری فوریه سینوسی مناسب خواهد بود.

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید تابع $f(x)$ که در فاصله $(-L,L)$ تعریف شده باشد دارای سری فوریه به فرم زیر باشد.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

می‌توان نشان داد:

الف) چنان‌چه $f(L)=f(-L)$ باشد می‌توان از رابطهٔ فوق مشتق‌گیری کرده و سری فوریه $f'(x)$ را در $(-L,L)$ را به صورت زیر مشخص کرد.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left\{-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x + b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right\}$$

ب) می‌توان از رابطه $f(x)$ انتگرال‌گیری کرد و سری فوریه را برای $\int f(x).dx$ در فاصلهٔ $[-L,L]$ به‌دست آورد.

$$\int f(x)dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x - b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right) + K$$

دقت کنید: عبارت نوشته شده در سمت راست تساوی فوق توصیف سری فوریه $\int f(x).dx$ نخواهد بود (به خاطر وجود ترم $\frac{a_0}{2}x$)

اما به هر حال از رابطهٔ فوق می‌توان سری فوریه تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ را در فاصله $[-L,L]$ به سادگی بیان کرد ولی باید مقدار ثابت K را مشخص کنیم.

مثال : اگر بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت زیر باشد.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right),(-\pi<x<+\pi)$$

حاصل سری $I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را به‌دست آورید.

حل :

$$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$$ و داریم $$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

حال با انتگرال از $f(x)$ و سری فوریه آن نتیجه می‌شود:

$$\int f(x)dx=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}+K$$

$$\int f(x).dx=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2} & -\pi<x<0\\[2mm] \dfrac{x^2}{2} & 0<x<\pi\end{cases}$$

با نگاه کردن به رابطهٔ فوق در $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$0=0-\frac{4}{\pi}\sum\frac{\sin(0)}{(2n+1)^3}+K\to K=0$$

و حال چنان‌چه در $x=\frac{\pi}{2}$ که برای تابع فوق نقطه پیوستگی است از قضیه دیریکله استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3}\Rightarrow\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{32}$$

مثال : تابع $f(x)=x^2$, $(-\pi<x<\pi)$ دارای سری فوریهٔ به فرم زیر می‌باشد،

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad(-\pi<x<\pi)$$

آن گاه سری فوریه تابع $x^3-\pi^2x$ را در فاصلهٔ مزبور بیابید؟

حل : اگر از فرض مساله انتگرال‌گیری کنیم به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}.\frac{1}{n}\sin nx+k$$

اگر در $x=0$ به رابطه فوق نگاه کنیم، مقدار $K=0$ خواهد شد، لذا داریم:

$$\left(x^3-\pi^2x\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

مثال : سری فوریهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{2}$ در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ به‌صورت زیر است.

$$f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-+\cdots$$

سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ کدام است؟

حل : با انتگرال‌گیری از $f(x)$ داریم:

$$\frac{1}{4}x^2=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+-\cdots+k \Rightarrow x^2=4\left(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+-\cdots\right)+c$$

برای محاسبه c، ضریب a_0 مربوط به سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ را در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3=\frac{2}{3}\pi^2 \Rightarrow c=\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3}$$

تساوی پارسوال در سری‌های فوریه

اگر $f(x)$ تابعی متناوب باشد که در فاصله تناوب $(-L,L)$ تعریف شده است. داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f^2(x).dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

مثال : هرگاه سری فوریه تابع $-\pi \le x \le \pi$ و $f(x)=x^2$ به‌صورت $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ باشد، حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ کدام است.

حل :

$$\text{سمت چپ تساوی پارسوال}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^4dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{5}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{5\pi}\pi^5$$

$$\text{سمت راست تساوی پارسوال}=\frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}+0\right)$$

بنابراین طبق تساوی پارسوال خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+16I \Rightarrow I=\frac{\pi^4}{90}$$

مثال : اگر بسط سری فوریه کسینوسی $0 \le x \le \pi$ و $f(x)=\sin x$ به صورت زیر باشد،

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

آن‌گاه مقدار سری $\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots$ برابر است با:

حل : در این مثال داریم:

$$L=\pi \qquad \frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi} \qquad b_n=0$$

$$a_n=\frac{-2}{\pi}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}=\begin{cases}0 & \text{اگر n فردباشد}\\ \frac{-2}{\pi}\frac{2}{n^2-1} & \text{اگر n زوج باشد}\end{cases}$$

لذا طبق تساوی پارسوال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 x dx=\frac{\left(+\frac{4}{\pi}\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{(2k)^2-1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow\quad 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\Rightarrow \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}$$

انتگرال فوریه

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ هم‌گرا باشد این امکان وجود دارد که تابع مذکور را در بیان انتگرالی که اصطلاحاً انتگرال فوریه تابع نامیده می‌شود به فرم زیر بنویسیم.

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

که در آن ضرایب انتگرال فوریه به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).\cos\omega x.dx}\qquad\boxed{B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).\sin\omega x.dx}$$

توجه کنید اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد $B(\omega)=0$ و اگر فرد باشد $A(\omega)=0$ است.

قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی انتگرال‌های فوریه

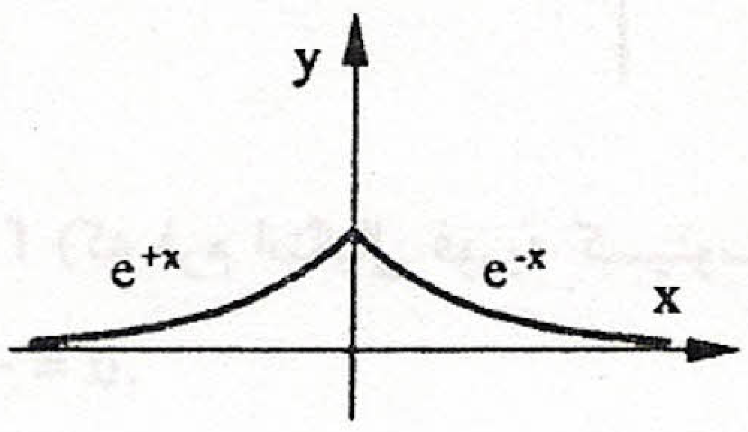
الف) اگر $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد آن‌گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطهٔ x_0 برابر $f(x_0)$ است.

ب) اگر $f(x)$ در نقطه x_0 گسسته باشد آن‌گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطهٔ x_0 برابر $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ است.

(از این موضوع دریافتن مقدار هم‌گرایی برخی انتگرال‌های ناسره استفاده می‌کنیم).

مثال : کدامیک از توابع زیر دارای انتگرال فوریه می‌باشد.

حل :

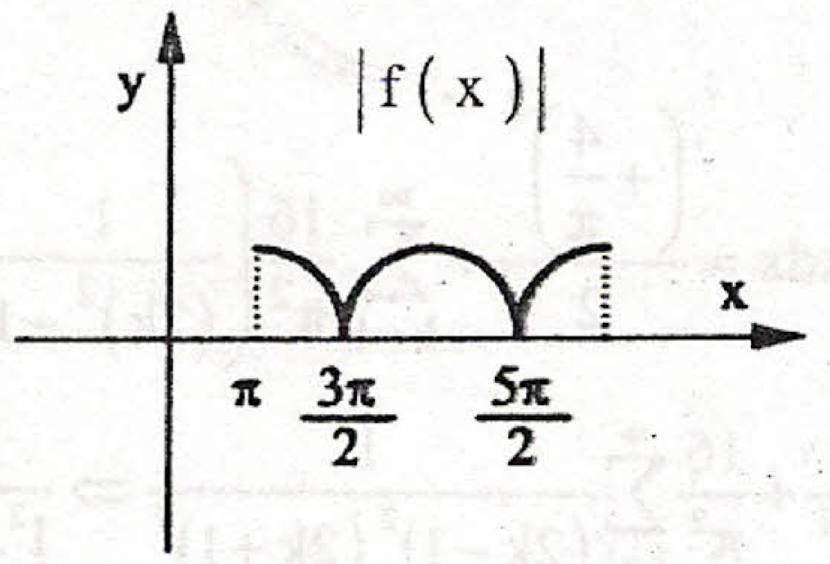


$$f(x)=e^{-|x|}\to f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ e^{+x} & x<0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx\xrightarrow{\text{زوج بودن تابع}}2\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{\infty}=2$$

پس تابع دارای انتگرال فوریه می‌باشد.

$$2)\ f(x)=\begin{cases}0 & x<\pi\\ \cos x & x>\pi\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\cos x|\,dx=\int_{\pi}^{\infty}|\cos x|\,dx=\infty \text{ نامحدود}$$

پس $g(x)$ انتگرال فوریه ندارد.

مثال : تابع $f(x)=f(-x)=e^{-2x};x>0$ مفروض است با استفاده از انتگرال فوریه این تابع حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{4+x^2}dx$$

حل : با توجه به زوج بودن تابع داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-2x}\cos\omega x dx \text{ و } B(\omega)=0$$

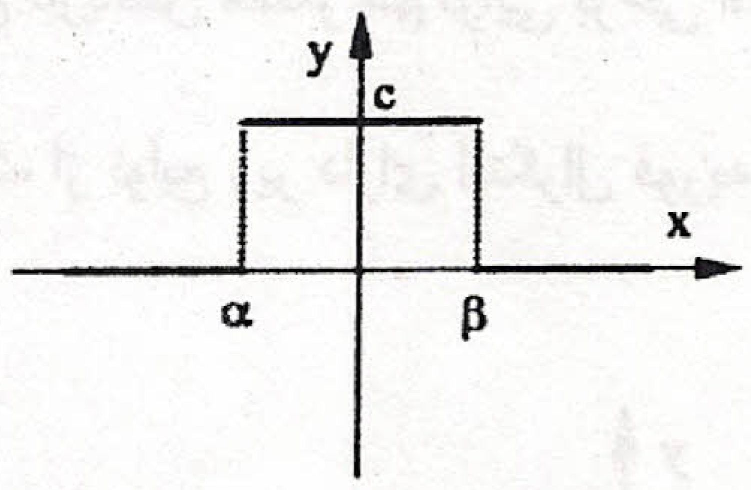
$$\boxed{F(s)=L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx} \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}L[\cos\omega x]\Big|_{s=2}=\frac{2}{\pi}\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=2}=\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است. $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}\cos\omega x d\omega$

در $x=2$ که نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ می‌باشد، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(2)=\int_0^{\infty}\frac{4\cos 2\omega}{\pi(4+\omega^2)}d\omega=e^{-4}\longrightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\omega}{4+\omega^2}d\omega=\frac{\pi e^{-4}}{4}$$

مثال : در صورتی که $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ ، و مقادیر $\beta>0$ و $\alpha<0$ و c اعداد ثابتی باشند و علاوه بر این $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ آن‌گاه، مقادیر c,β,α را بیابید؟



حل : با توجه به شکل تابع و با توجه به فرم انتگرالی بیان شده برای تابع $f(x)$ (که فرم انتگرال فوریه کسینوسی می‌باشد)، نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)$ باید زوج باشد و لذا لازم است که داشته باشیم: $\alpha=-\beta$.

حال انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را با این شرط می‌نویسیم:

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$\Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta}c\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}c\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^{\beta}=\frac{2c}{\pi\omega}\sin\omega\beta$$

بنابراین خواهیم داشت:

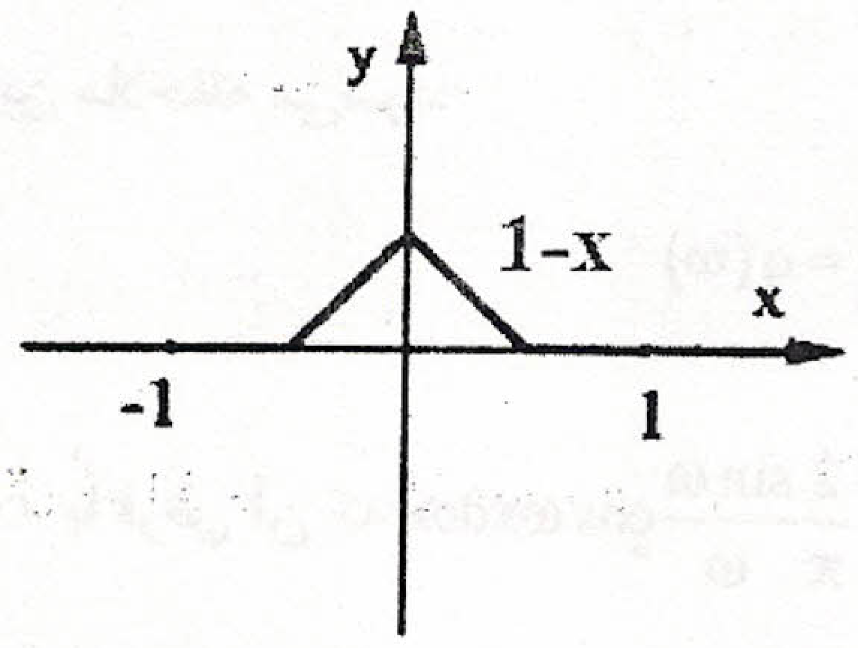
$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2c}{\pi\omega}\sin\omega\beta\cos\omega x\,d\omega$$

لذا با مقایسه این رابطه و فرم انتگرالی داده شده در فرض مساله، به‌دست می‌آید:

$$\beta=1 \quad , \quad \frac{2c}{\pi\omega}=\frac{1}{\omega}\Rightarrow c=\frac{\pi}{2} \quad , \quad \alpha=-1$$

مثال : در معادله انتگرالی زیر $\int_0^{\infty} f(\omega)\cos\omega x\, d\omega=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ تابع $f(\omega)$ برابر است با:

حل : از فرض مساله مشخص می‌شود تابع $h(x)=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ به صورت زوج توسیع داده شده و سپس انتگرال فوریه آن نوشته شده است.



لذا با انجام این کار خواهیم داشت:

$$h(x)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$$

که در آن:

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} h(x)\cos\omega x\, dx$$

با محاسبه $A(\omega)$ خواهیم داشت:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos\omega x\, dx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(1-x)}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right\}\Bigg|_0^1$$

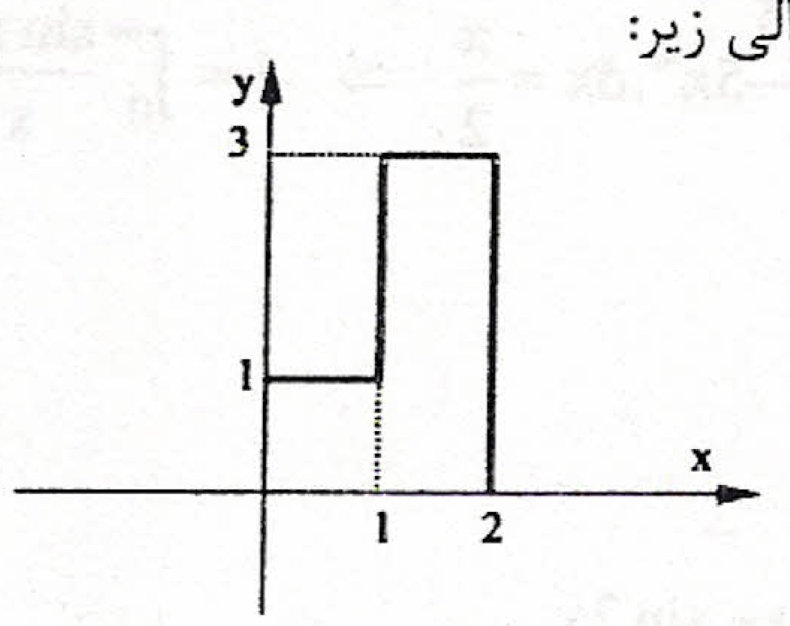
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

$$\Rightarrow\ f(\omega)=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

مشتق	انتگرال
$1-x$	$\cos\omega x$
-1	$+\ \frac{1}{\omega}\sin\omega x$
0	$-\ \frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x$

مثال : مطلوب است محاسبه $P(\omega)$ از معادله انتگرالی زیر:

$$\int_0^{\infty} P(\omega)\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 3 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$$



حل : قاعدتاً بیان انتگرالی سمت چپ باید انتگرال فوریه تابع سمت راست باشد، منتها تابع سمت راست فقط برای xهای مثبت تعریف شده، مضافاً بیان انتگرالی نوشته شده فقط دارای $\cos\omega x$ می‌باشد، بنابراین می‌توان این‌طور پنداشت تابع سمت چپ برای xهای منفی به صورت زوج گسترش پیدا کرده و بعد انتگرال فوریه آن نوشته شده، پس باید:

$$P(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x.dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1 (1)\cos\omega x.dx+\int_1^2 3\cos\omega x.dx+\int_2^{\infty} 0\cos\omega x.dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\omega x}{\omega}\Bigg|_0^1+\frac{3\sin\omega x}{\omega}\Bigg|_1^2\right\}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\sin(2\omega)-2\sin(\omega)}{\omega}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_0^\infty P(\omega)\sin\omega x.d\omega$, $xf(x)=\int_0^\infty q(\omega)\cos\omega x d\omega$ آن‌گاه رابطه بین $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$ و $q(\omega)$ را بیابید.

حل : بدیهی است که:

$$q(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x.f(x).\cos\omega x dx \qquad P(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x).\sin\omega x dx$$

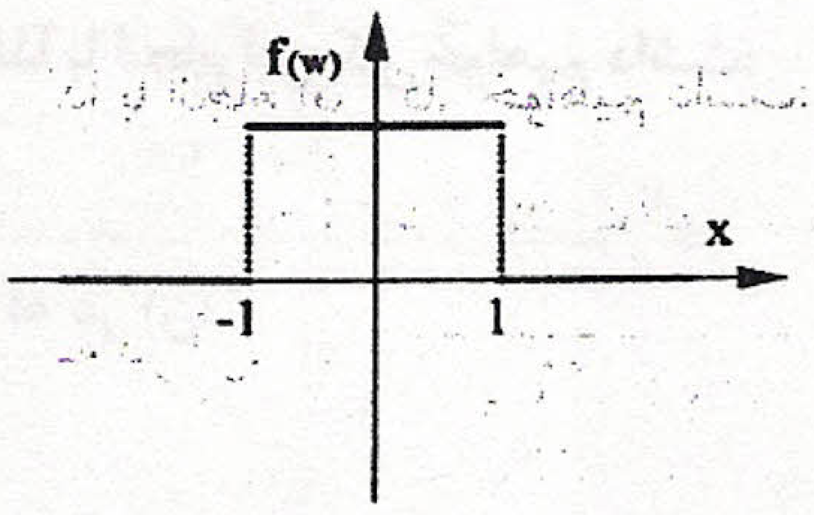
بنابراین ملاحظه می‌شود:

$$\frac{dp(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\omega}\left(f(x).\sin\omega x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x).x.\cos\omega x.dx=q(\omega)\longrightarrow\frac{dp(\omega)}{d\omega}=q(\omega)$$

مثال : با فرض آن که $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}=\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega$ باشد. آن‌گاه انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید؟

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx$$

$$J=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$



حل : در $x=0$ که نقطه پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0)=\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega(0)d\omega=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

حل (الف):

با تغییر متغیر $\omega=x^5$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\omega=x^5 \Rightarrow d\omega=5x^4dx\\ \omega=0 \Rightarrow x=0\\ \omega=\infty \Rightarrow x=\infty\end{cases}$$

پس به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{بازنویسی برحسب } x}\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x^5}5x^4.dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx=\frac{\pi}{10}$$

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx=\frac{\pi}{10}$$

حل (ب): با اعمال روش جزء به جزء داریم:

مشتق	انتگرال
$\sin^2 x$	$\frac{1}{x^2}$
$\sin 2x$	$-\frac{1}{x}$

$$J=\int_0^\infty\frac{(\sin x)^2}{x^2}dx\Rightarrow J=-\frac{1}{x}\sin^2 x\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=0+\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx\xrightarrow[\substack{x=0\ \Rightarrow\ \omega=0\\ x=\infty\ \Rightarrow\ \omega=\infty}]{2x=\omega\ \Rightarrow\ dx=\frac{d\omega}{2}}$$

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{d\omega}{2}=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

مثال : با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی، برای تابع $f(x)=e^{-x}$ که در آن $x \geq 0$ می‌باشد، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx\ ,\ m>0$$

حل :

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}L(\sin\omega x)\Big|_{s=1}=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

لذا با تبدیل $x \to m$ و $\omega \to x$ نتیجه می‌شود.

$$e^{-m}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$$

دقت کنید در حقیقت یکی از انتگرال‌های لاپلاس را در این مساله به‌دست آورده‌ایم.

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(f(x))=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx$$

و تبدیل فوریه معکوس $F(\omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{-1}(F(\omega))=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+i\omega x}.F(\omega)d\omega$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی:

$$F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\tilde{f}_c(\omega)$$

$$F_c^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_c(\omega)\cos\omega x.d\omega=f(x)$$

به همین ترتیب تبدیلات سینوسی فوریه و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x).\sin\omega x.dx=\tilde{f}_s(\omega)$$

$$F_s^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_s(\omega).\sin\omega x\,d\omega=f(x)$$

چند قضیه:

قضیه ۱) هرگاه $F\{f(x)\}=F(\omega)$ باشد خواهیم داشت:

$$F\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(i\omega)^n F(\omega)$$

قضیه ۲) به سادگی می‌توان نشان داد:

$$F\left(e^{-a|x|}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

قضیه ۳) (تقارن):

$$F(F(x))=2\pi f(-\omega)$$

و نیز می‌توان نشان داد:

$$F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

مثال : تبدیل فوریه $f(x)=\begin{cases}1 & -2<x<2\\ 0 & \text{بقیه جاها}\end{cases}$ را بیابید.

حل :

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx=\int_{-2}^{+2}e^{-i\omega x}(1)dx=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-2}^{+2}=-\frac{1}{i\omega}\{e^{-2i\omega}-e^{2i\omega}\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\{(\cos 2\omega-i\sin 2\omega)-(\cos 2\omega+i\sin 2\omega)\}=\frac{-1}{i\omega}(-2i\sin 2\omega)=\frac{2}{\omega}\sin 2\omega$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y''+4y=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید، چنان‌چه تبدیل فوریه $y(x)$ را $Y(\omega)$ بنامیم، $Y(\omega)$ را به‌دست آورید؟

حل : از دو طرف معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$(i\omega)^2Y(\omega)+4Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx\Rightarrow(-\omega^2+4)Y(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-i\omega x}.e^{-2x}dx\Rightarrow(4-\omega^2)Y(\omega)=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=i\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}$$

مثال : تبدیل فوریه سینوسی معکوس $e^{-3\omega}$ را بیابید.

حل :

$$f(x)=F_s^{-1}(e^{-3\omega})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-3\omega}\sin\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L\{\sin\omega x\}\Big|_{s=3}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{s^2+x^2}\Big|_{s=3}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{9+x^2}$$

مثال : تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=xe^{-x}$ را بیابید.

حل :

$$F_c(f(x))=\tilde{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cdot\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}xe^{-x}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L\{x\cos x\}\Big|_{s=1}$$

$$L\{\cos\omega x\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\Rightarrow L\{x\cos\omega x\}=-\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)'=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow F_c(f(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right\}\Bigg|_{s=1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$$

نکته : چند انتگرال مهم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \qquad (k>0\,,\, x>0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-kx} & (k>0\,,\, x>0) \\ -\frac{\pi}{2} e^{-kx} & (k>0\,,\, x>0) \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} \cos(ax)\, dx = \begin{cases} 1-a & 0 \le a \le 1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

حفظ کردن این انتگرال‌ها در حل مسایل بسیار موثر خواهد بود.